

Эффективный аналитический синтез одномерных линейных разреженных решёток

Михаил Брюханов, Михаил Чобану (Москва)

Статья посвящена проблеме синтеза разреженных цифровых фильтров низких частот с конечной импульсной характеристикой, применяемых в антенных решётках для ультразвукового сканирования. В работе приведён критерий оптимальности таких фильтров в контексте разреженности их структуры, рассмотрены пределы оптимизации и предложены методы уменьшения вычислительных затрат.

Помимо разнообразных устройств, используемых в медицине, ультразвуковые сканеры применяются при решении измерительных задач, неразрушающей диагностике дефектов и визуализации внутренней структуры материалов. «Сердцем» ультразвуковых сканеров может быть фазированная антенная решётка, представляющая собой совокупность дискретных элементов, каждый из которых осуществляет когерентное излучение или приём электромагнитных волн. Изменение направления сканирующего луча (управление диаграммой направленности антенны) производится в общем случае регулированием сигнала, подаваемого на отдельные элементы. Управление диаграммой направленности можно осуществлять, изменяя частоту излучаемых колебаний (частотное сканирование) либо фазу элементов антенной решетки.

В общем случае качество сканирующего луча зависит от числа элементов решётки, её конфигурации и размеров. Элементы решётки могут быть расположены вдоль одной оси (одномерная антенна) или распределены по плоскости. Расстояния между двумя соседними элементами могут быть одинаковыми (эквидистантные решётки) или различными. В настоящей статье рассматриваются одномерные (линейные) неэквидистантные решётки.

Наиболее простой метод линейного размещения элементов – это равномерное их расположение на расстоянии $\lambda/2$ друг от друга, где λ – дли-

на излучаемой волны. Это – случай так называемой плотной решётки, диаграмма направленности которой не имеет высоких побочных дифракционных максимумов. Однако на практике создание плотных решёток является очень сложной технической задачей, поскольку такие антенны содержат большое число излучающих элементов.

Разреженной решёткой называется структура из дискретных излучающих элементов, расстояния между которыми больше $\lambda/2$. В диаграмме направленности таких антенн неизбежно возникают высокие побочные дифракционные максимумы, ухудшающие качество сканирования. Добиться существенного снижения уровня дифракционных «пиков» можно с помощью оптимизации размещения элементов в решётке. Существует ряд подходов к такой оптимизации, начиная от случайного размещения элементов и заканчивая сложными алгоритмами их упорядочивания.

Задачу синтеза линейных разреженных решёток можно упростить, используя концепцию «эффективной апертуры» [1], т.е. рассматривая единую приёмно-передающую антенну в виде двух составляющих: антенны-приёмника и антенны-передатчика; при этом общая диаграмма излучения образуется суперпозицией диаграмм, соответствующих приёмнику и передатчику.

Выражение для эффективной апертуры решётки можно получить, рассмотрев математическое описание излучения приёмника и передатчика.

В дальней зоне диаграмма излучения описывается выражением:

$$P(s) = \int_{-\infty}^{\infty} a\left(\frac{x}{\lambda}\right) e^{i2\pi\left(\frac{x}{\lambda}\right)s} d\left(\frac{x}{\lambda}\right),$$

где $s = \sin\phi$, ϕ – угол между нормалью антенны и направлением излучения, $a(x/\lambda)$ представляет собой апертурную функцию, т.е. дискретную (поскольку антенная решётка состоит из дискретных элементов) функцию, описывающую «вес» каждого элемента; x/λ – координата излучающего элемента, выраженная в длинах волны. Это выражение представляет собой обратное преобразование Фурье для функции $a(x/\lambda)$.

Диаграмма излучения приёмно-передающей антенной решётки представляет собой произведение двух Фурье-преобразований апертурных функций приёмника и передатчика:

$$P_{TR}(s) = P_T(s)P_R(s).$$

Собственно эффективная апертура получается свёрткой апертурных функций приёмника и передатчика:

$$E(x/\lambda) = a_T(x/\lambda) * a_R(x/\lambda).$$

Таким образом, задача разработки антенной решётки с заданной диаграммой излучения сводится к получению двух дискретных апертурных функций, произведение Фурье-преобразований которых даёт желаемую диаграмму. При этом «прореживание» элементов происходит уже не в самой решётке, а в приёмнике и передатчике.

Сформулированная таким образом задача математически сводится к синтезу цифровых фильтров с заданным видом АЧХ. Действительно, функции $a_T(x)$ и $a_R(x)$ представляют собой импульсные характеристики КИХ-фильтров, а $E(x)$ является импульсной характеристикой фильтра, образованного их каскадным соединением. Следовательно, задача проектирования разре-

женных решёток теряет свою «физическую» специфику и может быть смоделирована средствами и методами цифровой обработки сигналов.

Перечислим основные подходы к реализации подобных «фильтров» (или антенных решёток) [5]:

- расположение элементов на равном расстоянии друг от друга и оптимизация их весов;
- использование одинаковых весов и оптимизация взаимного расположения элементов;
- использование какого-либо определённого (но нерегулярного) расположения элементов и оптимизация их весов;
- одновременная оптимизация весов и взаимного расположения элементов.

В настоящей работе был выбран второй подход: веса всех элементов одинаковы (и равны 1), вследствие чего предметом рассмотрения является оптимизация их взаимного расположения. В терминах теории сигналов задача сводится к синтезу двух цифровых ФНЧ с конечной импульсной характеристикой и коэффициентами, равными 0 или 1. При этом необходимо разработать методику получения таких фильтров с наименьшим количеством единичных коэффициентов, при которых обеспечивается наилучший вид частотной характеристики их каскадного соединения. В качестве критерия оптимизации АЧХ выбран уровень наибольшего из побочных лепестков, – чем он ниже, тем лучше происходит фильтрация и тем качественнее получается диаграмма направленности антенны.

В качестве передаточной характеристики каскадного соединения искомого фильтров была выбрана следующая функция:

$$H_{IA}(z) = \frac{z^{-NK} - 1}{z^{-K} - 1} \frac{z^{-ML} - 1}{z^{-L} - 1}, \quad (1)$$

где N, K, M и L – произвольные целочисленные параметры.

Фильтр $H_{EA}(z)$, называемый далее «эффективным» (по аналогии с «эффективной апертурой»), должен быть реализован в виде каскадного соединения двух КИХ-фильтров $H_{TR}(z)$ и $H_{REC}(z)$, импульсные характеристики которых не содержат отсчётов, отличных от 0 и 1.

Оптимальными в контексте данной работы могут быть названы фильтры $H_{TR}(z)$ и $H_{REC}(z)$, отличающиеся боль-

шой степенью разреженности (количество нулевых коэффициентов значительно превосходит количество единичных коэффициентов).

Задача разложения на полиномиальные множители функции $H_{EA}(z)$ решается с помощью круговых полиномов [8, 9]:

$$\Phi_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - \omega_k), \quad (2)$$

где $\omega_k - k$ -е решение уравнения

$$x^{n+1} = 0, \\ \omega_k = e^{\frac{2\pi k j}{n}},$$

а произведение берётся по всем k , взаимно простым с числом n (порядком кругового полинома).

Известно [8], что многочлен $x^n - 1$ можно разложить на множители с помощью следующего соотношения:

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x). \quad (3)$$

Тогда верно следующее равенство:

$$\frac{x^{NK} - 1}{x^K - 1} = \frac{\prod_{d|NK} \Phi_d(x)}{\prod_{u|K} \Phi_u(x)} = \prod_m \Phi_m(x), \quad (4)$$

где m – все делители числа NK , за исключением делителей числа K .

С учётом этого выражение (1) можно привести к виду:

$$H_{IA}(z) = \frac{z^{-NK} - 1}{z^{-K} - 1} \frac{z^{-ML} - 1}{z^{-L} - 1} = \\ = \prod_m \Phi_m(z^{-1}) \prod_n \Phi_n(z^{-1}), \quad (5)$$

где m – все делители числа NK , за исключением делителей числа K, n – все делители числа ML , за исключением делителей числа L . Например, для $N=6, K=2, M=8, L=3$ получается следующее разложение:

$$H_{IA}(z) = \frac{z^{-12} - 1}{z^{-2} - 1} \frac{z^{-24} - 1}{z^{-3} - 1} = \\ = \Phi_3(z^{-1}) \Phi_4(z^{-1}) \Phi_6(z^{-1}) \Phi_{12}(z^{-1}) \times \\ \times \Phi_2(z^{-1}) \Phi_4(z^{-1}) \Phi_6(z^{-1}) \Phi_8(z^{-1}) \times \\ \times \Phi_{12}(z^{-1}) \Phi_{24}(z^{-1}).$$

Было доказано [11], что, комбинируя между собой различные $\Phi_i(z^{-1})$,

всегда можно получить два полиномиальных множителя с коэффициентами 0 или 1, причём таких разложений для одного определённого набора параметров (N, K, M, L) может быть довольно много. Для оценки их оптимальности вводится коэффициент разреженности следующего вида:

$$K_p = \frac{N+M}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad (6)$$

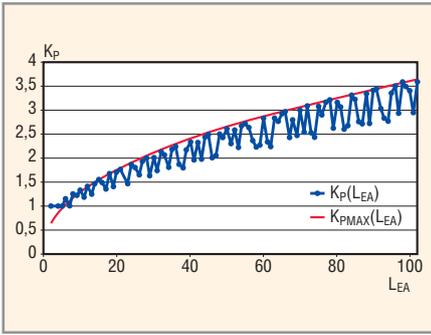
где γ_1 и γ_2 – число ненулевых коэффициентов в первом и втором множителе соответственно.

Поиск наилучшего разложения путём перебора всех возможных вариантов комбинирования $\Phi_i(x)$ приводит к большим вычислительным затратам. В приведённом выше примере разложение состоит из десяти множителей, что порождает $\sum_{i=1}^5 C_{10}^i = 637$ вариантов. С учётом того, что множество возможных комбинаций не удовлетворяет условию, наложенному на вид коэффициентов, а некоторые, даже имея коэффициенты нужного вида, не дают выигрыша в разреженности, полный перебор приводит к выполнению большого объёма непроизводительной вычислительной работы.

Пользуясь свойствами круговых полиномов, можно значительно уменьшить число сомножителей в выражении (5). В частности, авторы доказали, что для $N = p_1 p_2 \dots p_L$, где все p_i – простые числа, выражение (4) принимает вид:

$$\frac{x^{NK} - 1}{x^K - 1} = \Phi_{p_1}(x^{p_2 p_3 \dots p_L K}) \times \\ \times \Phi_{p_2}(x^{p_3 p_4 \dots p_L K}) \dots \Phi_{p_L}(x^K). \quad (7)$$

Разложение по формуле (7) позволяет вычислить максимальный коэффициент разреженности для заданной длины импульсной характеристики эффективного фильтра и облегчает поиск разреженных фильтров $H_{TR}(z)$ и $H_{REC}(z)$. Известно, что если p – простое число, то $\Phi_p(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1}$. Следовательно, все сомножители, присутствующие в разложении (7), представляют собой многочлены с единицами при x , интерполированные с некоторым коэффициентом. Таким образом, каждый из них не только удовлетворяет предъявляе-



Зависимость максимального коэффициента разреженности от длины эффективной апертуры

мым к виду коэффициентов требованиям, но и позволяет заранее определить число ненулевых коэффициентов.

Очевидно, что для любого отдельно взятого полинома $\Phi_{p_i}(x^{P_i})$ число единичных коэффициентов равно p_i . Произведение R сомножителей

$$\Phi_{p_1}(x^{P_1}) \Phi_{p_2}(x^{P_2}) \dots \Phi_{p_R}(x^{P_R})$$

будет иметь $p_1 p_2 \dots p_R$ единичных коэффициентов либо будет содержать некоторое количество коэффициентов, больших единицы и, следовательно, будет исключено из рассмотрения. С учётом этих соображений формула (6) для коэффициента разреженности может быть преобразована следующим образом:

$$K_p = \frac{N + M}{\gamma_1 + \gamma_2} = \frac{p_1 p_2 \dots p_R + s_1 s_2 \dots s_Q}{\prod \gamma_{C_{R+Q}^i} + \prod \gamma_{C_{R+Q}^{(R,Q) i}}}. \quad (8)$$

Здесь $N = p_1 p_2 \dots p_R$, $M = s_1 s_2 \dots s_Q$, где все p_i и s_i – простые числа, а $\prod \gamma_{C_{R+Q}^i}$ обозначает произведение некоторой комбинации из i этих чисел.

Для одного и того же набора параметров (N, K, M, L) наилучшим в смысле разреженности вариантом разложения будет тот, для которого сумма в знаменателе выражения (8) минимальна. К сожалению, поиском комбинаций $\prod \gamma_{C_{R+Q}^i}$, дающих в результате минимальную сумму, ограничиться нельзя, поскольку нет гарантии, что произведения круговых полиномов для них будут удовлетворять поставленным требованиям (в процессе перемножения многочленов могут появиться коэффициенты, большие единицы).

Таким образом, должен быть сформулирован признак, позволя-

ющий по значениям степеней при x и порядку круговых полиномов определять, будет ли произведение некоторого набора этих полиномов содержать коэффициенты, отличные от 0 или 1. С помощью такого признака можно легко находить оптимальное разложение, не тратя время на фактическое перемножение многочленов.

Для произведения двух сомножителей эта задача решается достаточно просто. Пусть дано произведение двух круговых полиномов: $\Phi_i(x_a)$ $\Phi_j(x_b)$, где i и j – простые числа. Коэффициенты, большие 1, в нём возможны только в том случае, если справедливы следующие два неравенства:

$$\begin{cases} \frac{\text{НОК}(a, b)}{a} \leq i - 1 \\ \frac{\text{НОК}(a, b)}{b} \leq j - 1 \end{cases}, \quad (9)$$

где $\text{НОК}(a, b)$ – это наименьшее общее кратное a, b . К сожалению, для произвольного числа перемножаемых многочленов универсальный признак найти не удалось. Поэтому при поиске наилучшего разложения приходится перемножать входящие в текущую комбинацию круговые полиномы $\Phi_i(x^a)$, проверяя коэффициенты полученного произведения. Однако выражение (8) позволяет уменьшить объём вычислений до необходимого минимума. С этой целью до начала перемножения многочленов следует отсортировать комбинации множителей N и M так, чтобы в первую очередь выбирались те из них, которые обеспечивают минимальное значение в знаменателе выражения (8). Первая же комбинация с коэффициентами, удовлетворяющими условию, и будет наилучшей.

Эти соображения позволили исследовать поведение максимального коэффициента разреженности с ростом длины «эффективной апертуры» (т.е. с увеличением числа отсчётов импульсной характеристики эффективного фильтра), обозначаемой L_{EA} , в достаточно широких пределах. На рисунке представлен график зависимости максимально возможного коэффициента разреженности L_{EA} , уве-

личивающейся в пределах от 2 до 102.

График демонстрирует пределы увеличения разреженности фильтров $H_T(z)$ и $H_R(z)$ с ростом длины импульсной характеристики эффективного фильтра; K_p не растёт монотонно, его значение зависит от вида простых множителей параметров N, K, M, L , поэтому для двух близких значений L_{EA} максимальные коэффициенты разреженности могут сильно различаться. Например, $L_{EA} = 42$ соответствует $K_p = 2,32$, а для $L_{EA} = 43$ K_p уже равен 1,96.

Гладкая кривая на рисунке является огибающей для характеристики $K_p(L_{EA})$. Выражение для неё получено экспериментальным путём после подсчёта большого количества точек зависимости $K_p(L_{EA})$ и выбора тех значений, которые возрастают монотонно. Для аппроксимации была выбрана степенная функция; в результате было получено следующее выражение:

$$K_p^{<max>}(L_{EA}) = \frac{1}{2} L_{EA}^{0,442}. \quad (12)$$

Оно позволяет судить о том, какого максимального значения коэффициента разреженности можно достичь для эффективного фильтра, задаваемого выражением (1). Очевидно, что использование его оправдано только для $L_{EA} > 5$, поскольку для меньших длин эффективной апертуры максимально достижимый коэффициент разреженности равен единице.

Следует отметить ещё два момента, связанных с удобством вычисления K_p по формуле (8). Очевидно, что выбор последовательности простых множителей N и M влияет на вид разложения по формуле (7), т.е. разные комбинации простых чисел $p_2 p_3 \dots p_L$ дадут разные выражения для $H_{TR}(z)$ и $H_{REC}(z)$. Но для вычисления максимально достижимого для данной длины эффективной апертуры L_{EA} коэффициента разреженности можно взять лишь одну последовательность множителей, не рассматривая остальные варианты. Эти варианты эквивалентны в смысле оптимальности, поэтому отказ от некоторой их части представляется приемлемым с учётом того, что скорость вычислений значительно возрастает.

Авторами проведён расчёт максимальных коэффициентов разреженности для длины эффективной апертуры $L_{EA} = 2 \dots 102$, без учёта изменения последовательности множителей. Полученная характеристика не совпала с представленной на рисунке лишь в четырёх точках, – столь небольшое расхождение позволяет считать более быстрый метод нахождения максимального K_p наиболее эффективным для практического использования.

Другое важное обстоятельство, значительно ускоряющее вычисления, связано с последовательным перемножением некоторой комбинации круговых полиномов, входящих в выражение (7). В связи с тем, что в них отсутствуют отрицательные коэффициенты, выгоднее проводить проверку коэффициентов на каждом шаге перемножения. Если на каком-либо из них появляются коэффициенты, большие единицы, то вся эта комбинация не удовлетворяет поставленным условиям и дальнейшее перемножения можно не выполнять. Такой подход позволяет на более

раннем этапе отсекал неприемлемые варианты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lockwood G., Li P., O'Donnell M., Foster S. Optimizing the Radiation Pattern of Sparse Periodic Linear Arrays. IEEE Transactions on Ultrasonic System, Ferroelectrics and Frequency Control. January 1996. Vol. 43. No. 1.
2. Inerfield M., Lockwood G., Garverick S. A Sigma-Delta-Based Sparse Synthetic Aperture Beamformer for Real-Time 3-D Ultrasound. IEEE Transactions on Ultrasonic System, Ferroelectrics and Frequency Control. February 2002. Vol. 49. No. 2.
3. Berger S. Nonuniform Sampling Reconstruction Applied to Sparse Array Beamforming. IEEE Transactions on Ultrasonic System, Ferroelectrics and Frequency Control. October 2002. Vol. 49. No. 10.
4. Yen J.T., Smith S.W. Real-Time Rectilinear Volumetric Imaging. IEEE Transactions on Ultrasonic System, Ferroelectrics and Frequency Control. January 2002. Vol. 49. No. 1.
5. Erstad J., Holm S. An Approach to the Design of Sparse Array Systems. IEEE Transactions on Circuits and Systems. May 1998. Vol. 45. No. 5.
6. Cabezas J., Diniz P. FIR Filters Using Interpolated Prefilters and Equalizers, IEEE Transactions on Circuits and Systems. January 1990. Vol. 37. No. 1.
7. Ob W.J., Lee Y.H. Design of Efficient FIR Filters with Cyclotomic Polynomial Prefilters Using Mized Integer Linear Programming. IEEE Signal Processing Letters. August 1996. Vol. 3. No. 8.
8. Schroeder M.R. Number Theory in Science and Communication, 3rd ed. Springer, 1994.
9. Riesel H. Prime Numbers and Computer Methods for Factorization, 2nd ed. Birkhauser, 1985.
10. Mitra S.K., Tchobanov M., Jovanovic-Dolecek G. A Simple Approach to the Design of Sparse Antenna Arrays. Proc. 2004 IEEE Intern. Symp. on Circuits and Systems. Vancouver, B.C. Canada. May 2004.
11. Mitra S., Jovanovic-Dolecek G., Tchobanov M. On the Design of One-Dimensional Sparse Arrays With Apodized End Elements. Proc. 12th European Signal Processing Conf. EUSIPCO-2004. Vol. 2. Vienna, Austria, 2004.



ПРОЦЕССОРЫ С АРХИТЕКТУРОЙ ARM: МОБИЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ НА КРИСТАЛЛЕ



EP9312
Процессор

EDB9315
Набор для разработчиков

Типичные применения

- Охранные системы
- Медицинское оборудование
- Модули графического интерфейса с пользователем
- NAS-серверы
- Мультимедиа устройства

Основные достоинства

- **Высокая производительность**
- Система на кристалле, требующая минимум внешних компонентов
- **Большое количество интегрированных интерфейсов:**
 - Ethernet-интерфейс
 - интегрированный графический контроллер с поддержкой сенсорного экрана (до 1024×768 точек)
 - контроллер IDE
 - контроллер USB
 - поддержка PCMCIA
- **Минимальный ток потребления:** идеальное решение для портативных устройств
- **Поддержка операционных систем Linux и Windows CE 5.0**

Приобрести продукцию Cirrus Logic можно в компании ПРОСОФТ



ПРОСОФТ – АКТИВНЫЙ КОМПОНЕНТ ВАШЕГО БИЗНЕСА

Телефон: (495) 232-2522 • E-mail: info@prochip.ru • Web: www.prochip.ru

Реклама