

Применение QR-алгоритма для расчёта собственных структур корреляционных матриц на платформе ADSP-TS201 фирмы Analog Devices

Александр Тумачек (Москва)

В статье проведено сравнение производительности сигнальных процессоров SHARC и TigerSHARC при выполнении задачи поиска собственных значений матрицы. Показано, что производительность процессоров по циклам примерно сопоставима, но с учётом тактовых частот процессор TigerSHARC обеспечил на рассматриваемой задаче прирост производительности примерно в четыре раза.

РАСЧЁТ СОБСТВЕННЫХ СТРУКТУР ВЫБОРОЧНЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ МАТРИЦ

Расчёт собственных структур матриц осуществляется при оценке мощностей шумов в каналах приёма и при адаптивном когерентном сложении сигналов с выходов приёмников различного назначения. В первом случае процедура применяется к выборочной корреляционной матрице сигналов, формируемой в каждом из каналов приёма на линии задержки с отводами. Во втором – к пространственной выборочной корреляционной матрице.

Оценка мощностей шумов в цифровых приёмниках основана на прин-

ципальной возможности разделения спектра выборочной корреляционной матрицы на две части, характеризующие соответственно коррелированные и некоррелированные во времени компоненты входного сигнала. Поскольку шумовые собственные значения содержат компоненты мощности шума, может быть получена её оценка. Данный подход широко распространён, поскольку он обладает важным достоинством – с помощью него оценка может быть получена в занятом канале, т.е. процедура инвариантна к присутствию сигнала в полосе приёма.

Условие когерентного сложения сигналов при разнесённом приёме в отсутствие помех в полосе приёма сигнала определяется правилом Бреннана. При равенстве мощностей шумов в каналах приёма, брэннановский вектор совпадает с собственным вектором матрицы R_{xx} , соответствующим максимальному собственному значению матрицы. Таким образом, задача поиска оптимального взвешивающего вектора при когерентном сложении сигналов при разнесённом приёме может быть сформулирована как задача поиска соответствующего собственного вектора пространственной выборочной корреляционной матрицы сигналов.

Одна из наиболее эффективных с точки зрения количества вычисле-

ний процедура расчёта собственных значений и собственных векторов комплексной эрмитовой матрицы R_{xx} включает два этапа. Первый – приведение исходной матрицы к трёхдиагональному виду; второй – приведение трёхдиагональной матрицы к диагональному виду с помощью последовательности ортогонально-подобных преобразований на основе базового или модифицированного QR-алгоритмов, которые рассматриваются ниже.

QR-АЛГОРИТМ КАК МЕТОД РАСЧЁТА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

QR-алгоритм на сегодняшний день является одним из наиболее эффективных методов расчёта собственных значений эрмитовых матриц. Алгоритм двухэтапной процедуры расчёта собственных значений приведён на рисунке 1.

QR-разложение трёхдиагональной матрицы сводится к последовательному обнулению поддиагональных элементов с помощью правостороннего ортогонального преобразования и мультипликативного накопления матриц преобразования. В результате получается две матрицы: верхнетреугольная R и ортогональная Q . В качестве матрицы преобразования, позволяющей обнулять поддиагональные элементы, могут использоваться матрицы отражения Хаусхолдера или матрицы вращения Гивенса.

Матрица Хаусхолдера, обнуляющая поддиагональный элемент i -го столбца трёхдиагональной матрицы S , вычисляется по формуле:

$$H_i = E - \frac{2}{|\mathbf{v}|} \mathbf{v} \mathbf{v}^+$$

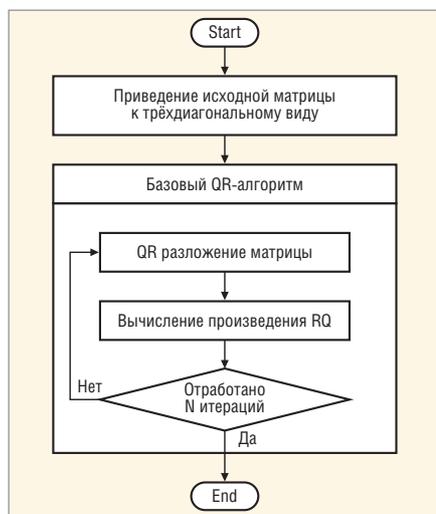


Рис. 1. Расчёт собственных структур матриц с помощью базового QR-алгоритма

где

$$\bar{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \mathbf{s}_i - \sqrt{\mathbf{s}_i^2 + \mathbf{s}_{i+1}^2} \\ \mathbf{s}_{i+1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Для приведения матрицы к верхнетреугольной требуется N-преобразование Хаусхолдера:

$$\mathbf{R} = \mathbf{H}_{N-2}\mathbf{H}_{N-1}\dots\mathbf{H}_0\mathbf{S}. \quad (2)$$

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(1 - \frac{2|\mathbf{s}_{i+1}|^2}{|\bar{\mathbf{v}}|^2}\right) & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & -\frac{2\cdot\bar{\mathbf{s}}_{i+1}\left(\mathbf{s}_i - \sqrt{\mathbf{s}_i^2 + \mathbf{s}_{i+1}^2}\right)}{|\bar{\mathbf{v}}|^2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 - \frac{2|\mathbf{s}_{i+1}|^2}{|\bar{\mathbf{v}}|^2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Видно, что при формировании матрицы Хаусхолдера необходимо рассчитывать только два её элемента. «Активные» элементы матрицы Хаусхолдера можно условно обозначить как $\mathbf{h}_{00}, \mathbf{h}_{01}, \mathbf{h}_{10}, \mathbf{h}_{11}$. Для них справедливы следующие соотношения: $\mathbf{h}_{00} = -\mathbf{h}_{11}, \mathbf{h}_{10} = \bar{\mathbf{h}}_{01}$. Важное свойство диагональных элементов состоит в том, что они являются действительными.

Как видно из рисунка 2, где представлены графики сходимости трёхдиагональной матрицы к диагональной от числа итераций QR-алгоритма, последний обладает достаточно медленной сходимостью.

Под сходимостью здесь понимается сходимость последовательности матриц $\{\mathbf{M}_k\}$ к некоторой предельной матрице. На практике, как только норма $\|M_k e_1 - e_1 m_{11}^{(k)}\|$ становится пренебрежимо мала, $m_{11}^{(k)}$ берут в качестве собственного значения, а вычисления продолжают с подматрицей, полученной отбрасыванием первой строки и первого столбца.

МОДИФИКАЦИЯ QR-АЛГОРИТМА

Процесс диагонализации матрицы может быть существенно ускорен при использовании модифицированного QR-алгоритма (QR-алгоритма со сдвигами). Суть алгоритма заключается в построении последовательности подобных матриц, сходящихся к мат-

Откуда, учитывая свойство эрмитовости матрицы Хаусхолдера:

$$\mathbf{S} = (\mathbf{H}_{N-2}\mathbf{H}_{N-1}\dots\mathbf{H}_0)\mathbf{R} = (\mathbf{H}_0\mathbf{H}_1\dots\mathbf{H}_{N-2})\mathbf{R} = \mathbf{Q}\mathbf{R}. \quad (3)$$

Следовательно,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{H}_0\mathbf{H}_1\dots\mathbf{H}_{N-2}. \quad (4)$$

Матрица Хаусхолдера для обнуления поддиагонального элемента i -го столбца выглядит следующим образом:

рице диагонального вида. В основе алгоритма лежит QR-разложение матрицы, т.е. её мультипликативное представление в виде произведения ортогональной (Q) и верхнетреугольной (R) матриц. Модифицированный алгоритм приведён на рисунке 3.

Итерации модифицированного алгоритма могут быть представлены в следующем виде:

$$S_0 = S, S_0 - \tau_0 E = Q_0 R_0, \quad (6)$$

т.е. QR-разложение применяется к матрице, из диагонали которой вычтена константа τ_0 .

$$S_1 = R_0 Q_0 + \tau_0 E - \text{формирование матрицы } S_1, \text{ подобной } S_0, \quad (7)$$

$$S_1 - \tau_1 E = Q_1 R_1 - \text{QR-разложение матрицы } S_1, \text{ и т.д.} \quad (8)$$

Сдвиг τ_i используется для ускорения сходимости алгоритма. При определённом выборе шага можно обеспечить скорость убывания внедиагональных элементов матрицы не хуже квадратичной. Последовательность этих итераций может быть записана в виде:

$$D = Q_{N-1}^+ Q_{N-2}^+ \dots Q_0^+ S Q_0 Q_1 \dots Q_{N-1} \quad (9)$$

или

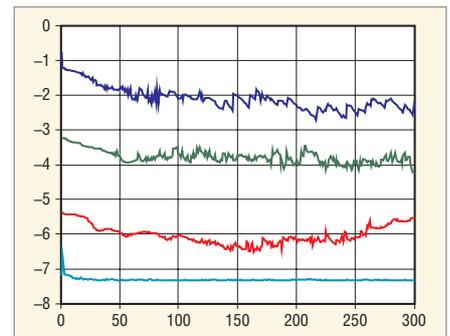


Рис. 2. Кривые сходимости QR-алгоритма для эрмитовых матриц 10 × 10 с различной обусловленностью

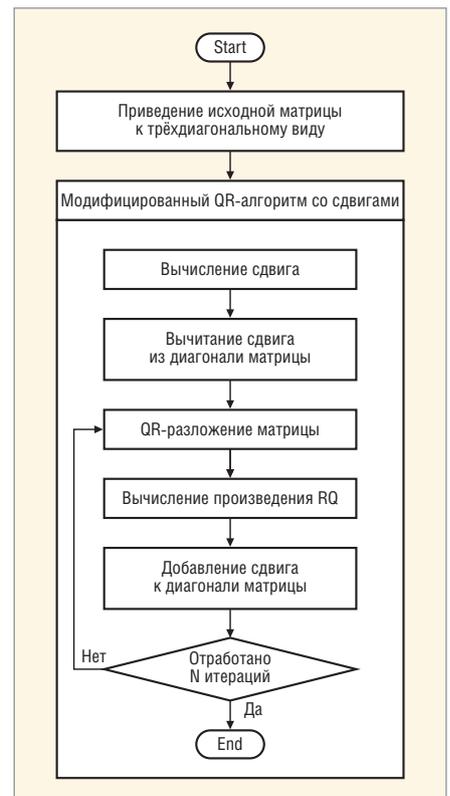


Рис. 3. Расчёт собственных структур матрицы с помощью модифицированного QR-алгоритма

$$D = Q_{N-1}^+ Q_{N-2}^+ \dots Q_0^+ G M G^+ Q_0 Q_1 \dots Q_{N-1}, \quad (10)$$

где N – число итераций.

Результатом итеративного процесса является матрица, на диагонали которой расположены оценки собственных значений матрицы M .

Возможны различные варианты сдвигов в QR-алгоритме. Одним из наиболее эффективных сдвигов, обеспечивающих квадратичную скорость сходимости алгоритма, является сдвиг по Уилкинсону. Он равен собственному значению 2×2 правой нижней подматрицы, ближайшему к её верхнему диагональному элементу. Далее будем рассматривать QR-алгоритм со сдвигами по Уилкинсону.

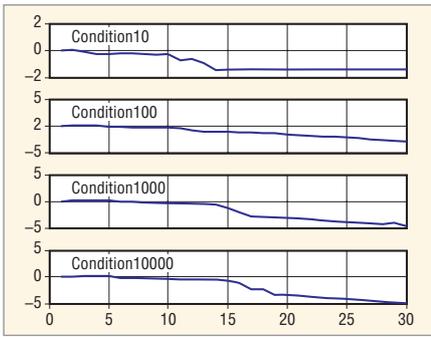


Рис. 4. Графики сходимости модифицированного QR-алгоритма со сдвигами по Уилкинсону при различной обусловленности матриц

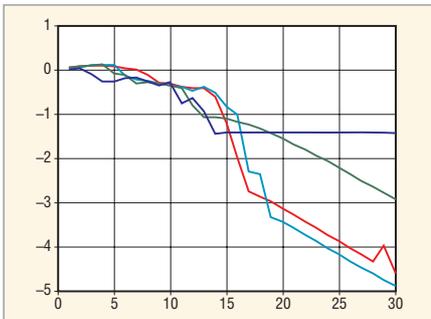


Рис. 5. Графики сходимости модифицированного QR-алгоритма для эрмитовых матриц 10 × 10 при различной обусловленности (логарифмический масштаб)

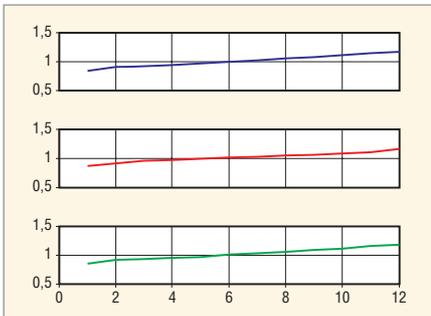


Рис. 6. Спектры матриц размерностью 12 × 12, полученные тремя различными способами

Сходимость модифицированного QR-алгоритма

Приведём результаты исследования скорости сходимости и точности вычисления собственных значений QR-алгоритма со сдвигами по Уилкинсону, реализованного на цифровом сигнальном процессоре ADSP-TS 201.

Таблица 1. Количество циклов, затрачиваемых процессором ADSP TS-201 на выполнение QR-алгоритма со сдвигами по Уилкинсону

Размерность матрицы N	QR-алгоритм с расчётом с накоплением С.В.	Приведение к трёхдиагональному виду	Трёхдиагонализация и QR-алгоритм
6	37 357	9600	46 957
8	83 403	42 678	126 081
10	162 227	70 573	232 800
12	289 663	112 500	402 163

Положим, что найденное с помощью QR-алгоритма собственное значение исходной матрицы M является точным собственным значением некоторой возмущённой матрицы $\tilde{M} = M + \Delta M$, причём для матрицы-возмущения ΔM справедлива следующая оценка:

$$\|\Delta M\|_e = k MashEps N^2 \|M\|_e, \quad (11)$$

где $\|M\|_e$ и $\|\Delta M\|_e$ – евклидовы нормы матрицы M и матрицы-возмущения соответственно; $MashEps$ – машинная точность; k – некоторая константа, $1 \leq k \leq 2$; N – порядок матрицы. В сигнальном процессоре ADSP-TS 201 в режиме вычислений с плавающей точкой под мантиссу отводится 24 бита. Значение $MashEps$ при этом приблизительно равно $4,5 \times 10^{-7}$.

При исследовании QR-алгоритма для оценки нормы матрицы-возмущения используется следующая формула:

$$\|\Delta M\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^N (\lambda_i - \tilde{\lambda}_i)^2}, \quad (12)$$

где λ_i – истинные собственные значения исходной матрицы, а $\tilde{\lambda}_i$ – оценки собственных значений, полученные на сигнальном процессоре. Для удобства графического представления зависимости нормы матрицы-возмущения от числа итераций можно пронормировать выражение (12) значением нормы исходной матрицы:

$$\delta = \frac{\|\Delta M\|_e}{\|M\|_e}. \quad (13)$$

Это позволяет в одних координатах привести графики сходимости для матриц с различной обусловленностью. В качестве тестовых матриц использовались выборочные корреляционные матрицы сигналов, формируемые по модели заданной сигнально-помеховой обстановки. Хорошо обусловленные матрицы формировались по шумовым реализациям, плохо обусловленные – по реализациям, содержащим аддитивную смесь сигнала заданной мощности и шума.

Как известно, при выборе сдвигов по Уилкинсону гарантируется скорость

сходимости QR-алгоритма не хуже квадратичной. Как показывает анализ, реализованный алгоритм удовлетворяет данному правилу. Вместе с тем необходимо отметить, что для плохо обусловленных матриц ($Cond M > 100\,000$) имеет место незначительное снижение скорости сходимости алгоритма.

Графики сходимости QR-алгоритма для эрмитовых матриц 10×10 с различной обусловленностью показаны на рисунке 4. Видно, что алгоритм со сдвигами по Уилкинсону сходится через $3N$ шагов, т.е. в среднем для расчёта одного собственного значения матрицы требуется три итерации (см. рис. 5).

В таблице 1 приведены данные по количеству затрачиваемых процессором ADSP TS-201 циклов на выполнение QR-алгоритма со сдвигами по Уилкинсону.

Точность вычисления собственных значений

Проведём исследование правильности вычисления собственных значений для обусловленности входной матрицы $condM = 1$ размерностью $N = 12$. Результаты исследования показаны на рисунке 6 в виде спектров матрицы, полученных тремя различными способами.

Спектр матрицы на верхнем графике получен при помощи встроенной функции MathLab; средний график даёт QR-алгоритм со сдвигами по Уилкинсону, написанный на М-языке; нижний график получен в результате вычислений, проведённых на сигнальном процессоре ADSP-TS-201.

Как видно из приведённых графиков, расчёт собственных значений на цифровом сигнальном процессоре ADSP-TS-201 и в среде MathLab даёт сходные результаты, с поправкой на точность вычислений. Для вычисления спектра матрицы на цифровом сигнальном процессоре проводилось $3N$ итераций QR-алгоритма; этого оказалось достаточно для достижения заданной точности собственных значений.

СРАВНЕНИЕ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ МОДИФИЦИРОВАННОГО QR-АЛГОРИТМА НА ПРОЦЕССОРАХ ADSP-21160 И ADSP-TS-201

QR-алгоритм со сдвигами по Уилкинсону реализован на сигналь-

Таблица 2. Сравнительная производительность процессоров при расчёте собственных значений матрицы с помощью модифицированного QR-алгоритма

Размерность матрицы N	QR-разложение	Трёхдиагонализация	Процессор ADSP-TS201S	Процессор ADSP-21160S	Выигрыш в производительности
5	1385	9600	10 985	15 211	1,38
8	3007	42 678	45 685	43 690	0,95
10	4280	70 573	74 853	70 516	0,94
12	5800	112 500	118 300	108 911	0,92

ном процессоре ADSP-TS-201 с помощью набора функций. Функция `z_diag_proc(arg[])` предназначена для приведения комплексной эрмитовой матрицы к трёхдиагональному виду. Функция `QR_decomposition(arg[])` осуществляет разложение трёхдиагональной матрицы на произведение ортогональной матрицы Q и правой верхнетреугольной матрицы R . Функция `RQ_mux(arg[])` производит обратное перемножение матриц RQ . Функции написаны на языке ассемблера процессора ADSP-TS-201 с соблюдением протокола вызова, реализуемого C-компилятором.

Производительность процессоров сравнивалась при расчёте собственных значений матрицы с помощью

модифицированного QR-алгоритма. Результаты вычислений приведены в таблице 2.

Как видно из таблицы 2, суммарные затраты по циклам для процессоров ADSP-TS-201 и ADSP-21160 сопоставимы. Однако с учётом того, что тактовая частота процессора ADSP-TS-201 в пять раз выше, чем тактовая частота ADSP-21160, первый процессор обеспечивает реальный рост производительности примерно в четыре раза.

Выводы

Проведено сравнение производительности сигнальных процессоров SHARC и TigerSHARC при выполнении задачи поиска собственных зна-

чений матрицы. Показано, что производительность процессоров по циклам примерно сопоставима, но с учётом таковых частот процессор TigerSHARC обеспечил на рассматриваемой задаче прирост производительности примерно в четыре раза. Платформа TigerSHARC (ADSP-TS201) обладает существенным потенциалом в плане дальнейшей разработки приёмной аппаратуры и повышения эффективности алгоритмов обработки сигналов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Thompson A.R., Clark B.G., Wade C.M., Napier P.J.* The very large array. *Astrophysical J. Supplement Series*. 1980. Vol. 44. Oct. PP. 151–167.
2. *Кремер И.Я., Кремер А.И., Петров В.М.* и др. *Пространственно-временная обработка сигналов. Радио и связь*, 1984.
3. *Кублановская В.Н.* Первая публикация по QR алгоритму в «Дополнении» к изданию 1960 г. монографии *Д.К. и В.Н. Фадеевых* «Вычислительные методы и линейная алгебра».
4. *Парлетт Б.* Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. Мир, 1983.