# Квазиоптимальные адаптивные алгоритмы обнаружения сигналов

**Владимир Бартенев (Москва)**

**В статье рассмотрены квазиоптимальные адаптивные алгоритмы обнаружения сигналов в условиях априорной помеховой неопределённости, основанные на Марковской и авторегрессионной моделях коррелированных помех. Оба подхода позволяют приблизиться к оптимальной обработке, не прибегая к обращению оцениваемой ковариационной матрицы помехи. Несомненным преимуществом обладает авторегрессионный подход, обеспечивающий обнаружение сигналов на фоне многокомпонентных коррелированных помех.**

## Введение

При построении адаптивных обнаружителей полезных сигналов важнейшей задачей является управление весовыми коэффициентами как в цифровых режекторных фильтрах, так и многоканальных допплеровских фильтрах, входящих в их состав. Решение этой задачи рассмотрим с общих позиций построения систем обнаружения движущихся целей.

Известно [1], что оптимальный обнаружитель должен формировать отношение правдоподобия или его достаточные статистики и сравнивать их с порогом. При обнаружении квазидетерминированных сигналов на фоне коррелированных помех с гауссовым распределением достаточная статистика отношения правдоподобия имеет вид:

$$Z_1 = Z^*_{\text{BX}} M^{-1} S_{\text{BX}}, \qquad (1)$$

где $Z_{\text{вх}}$ – $N$-мерная комплексная входная выборка; $N$ – количество импульсов в пачке, $S_{\text{вх}}$ – $N$-мерный сигнальный вектор; $M$ – известная Эрмитова ковариационная матрица помехи; * – знак транспонирования и комплексного сопряжения.

Структура оптимального по критерию отношения правдоподобия обнаружителя стохастического сигнала на фоне аддитивной гауссовой помехи определяется достаточной статистикой:

$$Z_2 = Z^*_{\text{BX}} M^{-1} Z_{\text{BX}}. \qquad (2)$$

В реальных условиях ковариационная матрица коррелированной помехи неизвестна, поэтому воспользуемся адаптивным байесовским подходом, подставляя вместо неизвестной ковариационной матрицы помехи её оценку максимального правдоподобия.

Таким образом, адаптивная обработка в соответствии с (1) и (2) предполагает оценку ковариационной матрицы помехи, её обращение и формирование решающего правила. Реализовать такую обработку, в том числе и для вектора небольшой размерности ($N > 16$) в реальном масштабе времени, в настоящее время затруднительно, даже на самой современной элементной базе. Поэтому с целью практической реализации адаптивных обнаружителей движущихся целей рассмотрим квазиоптимальные алгоритмы цифровой обработки, получающиеся из (1) и (2). При этом мы будем сужать рамки априорной неопределённости, задавая отдельные параметры коррелированной помехи или заменяя реальную помеху её моделью.

Традиционно задача обнаружения сигналов в коррелированных помехах решается в два этапа, т.е. вначале производится «обеление» (режекция) помехи, а затем обнаружение сигнала на фоне белого шума. Для данного случая обработки представим достаточные статистики (1) и (2) в ином виде. Для этого факторизуем обратную ковариационную матрицу на нижнюю $L$ и верхнюю $H$ треугольные матрицы. Тогда (1) и (2) будут иметь вид:

$$Z_1 = \left(Z^*_{\text{BX}} L\right)\left(HS\right), \qquad (3)$$

$$Z_2 = \left(Z^*_{\text{BX}} L\right)\left(HZ_{\text{BX}}\right). \qquad (4)$$

Перейдём к рассмотрению различных адаптивных алгоритмов формирования и управления весовыми коэффициентами в соответствии с выражениями (3) и (4).

## Управление весовыми коэффициентами при построении адаптивного обнаружителя на основе Марковской модели коррелированной помехи

С целью исключения операции обращения ковариационной матрицы, а значит, и упрощения алгоритмов формирования и управления весовыми коэффициентами при адаптивном обнаружении, воспользуемся аппроксимацией реальной коррелированной помехи Марковской m-связной последовательностью. В этом случае обратная корреляционная матрица имеет диагонально-ленточную структуру, причём не равны нулю только ближайшие $m$ поддиагоналей вблизи главной диагонали. В частности, для $m = 1$ обратная корреляционная матрица имеет вид:

$$M^{-1} = \begin{matrix} 1 & -Re^{-j\gamma} & 0 & 0 \\ -Re^{-j\gamma} & R^2+1 & -Re^{-j\gamma} & 0 \\ 0 & -Re^{-j\gamma} & R^2+1 & -Re^{-j\gamma} \\ 0 & 0 & -Re^{-j\gamma} & 1 \end{matrix},$$

где $R$, $\gamma$ – оценки модуля и аргумента межпериодного коэффициента корреляции.

В общем случае m-связной Марковской последовательности комплексные элементы обратной матрицы можно вычислить:

$$M^{-1}_{i,k} = \left(-Re^{-j\gamma}\right)^{i-k} \sum_{\nu=0}^{m-1} C^{\nu}_{m} C^{|i+k|+\nu}_{m} R^{2\nu},$$

где $C^{|i+k|+\nu}_{m}$ – число сочетаний из $m$ по $\nu$ и из $m$ по $|I+k|+\nu$.

Для Марковской модели коррелированной помехи факторизация обратной матрицы приводит к тому, что верхняя и нижняя треугольные матрицы одинаковы (симметричны), т.е. для $m = 1$ получаем:

$$L = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -Re^{-j\gamma} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -Re^{-j\gamma} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -Re^{-j\gamma} & 1 \end{matrix}.$$

Тогда статистики $Z_1$ и $Z_2$ в соответствии с (3) и (4) будут иметь вид для $m = 1$:

$$Z_1 = \frac{1}{\sigma^2\left(1-R^2\right)}\sum_{i=0}^{N-1}\left(Z_i - Re^{-j\gamma} Z_{i+1}\right)^* \times$$

$$\times\left(S_i - Re^{-j\gamma} S_{i+1}\right),$$

$$Z_2 = \frac{1}{\sigma^2\left(1-R^2\right)}\sum_{i=0}^{N-1}\left(Z_i - Re^{-j\gamma} Z_{i+1}\right)^* \times$$

$$\times\left(Z_i - Re^{-j\gamma} Z_{i+1}\right).$$

Таким образом, адаптивная обработка включает в себя адаптивное «обеление» помехи с помощью нерекурсивных цифровых фильтров первого порядка, адаптивное взвешивание сигнального вектора, накопление полученных произведений по пачке и нормирование полученной суммы оценкой дисперсии помехи с некоторым коэффициентом, определяющим вероятность ложной тревоги на выходе обнаружителя.

Отличие $Z_1$ от $Z_2$ состоит в том, что в первом случае реализуется когерентное накопление по пачке. Для неизвестной скорости цели это приведёт к многоканальной структуре обработки типа:

$$Z_1(n) = \frac{1}{\sigma^2\left(1-R^2\right)}\sum_{i=0}^{N-1}\left(Z_i - Re^{-j\gamma} Z_{i+1}\right)^* \times$$

$$\times\left(S_i(n) - Re^{-j\gamma} S_{i+1}(n)\right),$$

где $n$ – номер допплеровского канала,

$$S(n) = (1, e^{j2\pi n/N}, e^{j4\pi n/N}, \ldots, e^{j2\pi(N-1)/N}).$$

Объединение каналов, как правило, производится схемой максимального отбора [2].

Во втором случае после адаптивной режекции применяется некогерентное накопление. Этот алгоритм можно дополнительно упростить, модифицировав обратную матрицу путём добавления вместо 1 в правом нижнем углу матрицы квадрата модуля межпериодного коэффициента корреляции. Тогда для $m = 1$ получим:

$$Z_2 = \sum_{i=0}^{N-1}\left|Z_i - Re^{-j\gamma} Z_{i+1}\right|^2.$$

В общем случае для m-связной коррелированной помехи:

$$Z_2 = \sum_{i=0}^{N-m-1}\left|\sum_{\upsilon=1}^{m+1}\left(-Re^{-j\gamma}\right)C_m^{\upsilon-1} Z_{\upsilon+i} - \right.$$

$$\left. - Re^{-j\gamma} Z_{i+1}\right|^2.$$

Предельное упрощение достигается при рассмотрении сильно коррелированной помехи, т.е. при $R = 1$. В этом случае алгоритм соответствует m-каскадному включению череспериодных схем вычитания с весовыми коэффициентами, формируемыми на основе оценок аргумента межпериодного коэффициента корреляции и управляемыми фазовой адаптацией с последующим некогерентным накоплением.

Для случая (3), когда модуль межпериодного коэффициента корреляции $R = 1$, структура обработки вырождается в последовательно включенные черезпериодную схему вычитания с фазовой адаптацией и последующим когерентным накопителем в процессоре дискретного преобразования Фурье.

Главный вывод, который можно сделать из приведённых алгоритмов, состоит в том, что Марковская модель коррелированной помехи позволяет реализовать квазиоптимальную обработку с помощью модульной архитектуры в виде адаптивных автокомпенсаторов. В каждом автокомпенсаторе требуется управление лишь одним весовым коэффициентом, получаемым в устройстве оценки модуля и аргумента межпериодного коэффициента корреляции. Это естественным образом удовлетворяет современной концепции распараллеливания обработки с использованием нескольких программируемых модулей на сигнальных процессорах.

## Управление весовыми коэффициентами при авторегрессионном подходе к построению адаптивного обнаружителя

Оценка спектральной плотности помехи и разработка фильтра для её компенсации – взаимосвязанные проблемы. Недавно применительно к спектральному оцениванию был предложен метод максимальной энтропии, который характеризуется высокой точностью и большим разрешением, а главное, основывается на простых рекуррентных соотношениях. Эти свойства целесообразно использовать при построении адаптивного обнаружителя.

Кратко изложим основные положения данного метода применительно к задаче обнаружения полезных сигналов.

Традиционные методы спектрального анализа обладают такими недостатками, как низкая точность и невысокая разрешающая способность, что обусловлено ограниченной выборкой наблюдений. Поэтому выборку наблюдений дополняют нулями или используют функцию окна, снижая уровень боковых лепестков. Метод максимальной энтропии, базирующийся на теории информации, лишён перечисленных недостатков благодаря адаптивной обработке входной информации.

Главная концепция метода максимальной энтропии заключается в следующем: выборки процесса экстраполируются таким образом, чтобы согласовать их с исследуемым процессом для извлечения максимальной информации. Оценка спектра, получаемая при этом, характеризуется высшей энтропией по сравнению с другими методами оценивания. Метод максимальной энтропии включает в себя три ступени: выбор модели рассматриваемого процесса, идентификацию параметров модели из наблюдаемого процесса и оценку спектра на основе полученных параметров. Авторегрессионная модель случайного процесса порядка $p$ выражается следующим образом:

$$Z_k = -\sum_{n=0}^{p} a_n Z_{k-n} + \xi_k,$$

где $\xi_k$ – стационарный белый гауссов шум с мощностью $\sigma^2$. С помощью параметров $a_p$ и $p$ можно аппроксимировать широкий класс помех естественного и искусственного происхождения, в том числе и многокомпонентные коррелированные помехи, имеющие допплеровские составляющие на различных частотах. Учитывая, что ковариационная матрица – теплицева (поскольку период повторения постоянный), при помощи простой рекурсивной формулы Левинсона–Дарбина по отношению к алгоритму идентификации параметров получаем оценку спектра через параметры авторегрессии:

$$S(f) = \sigma^2 \Big/ \left|1 + \sum_{n=1}^{p} a_n e^{-j2\pi n f T}\right|^2.$$

Для понимания метода максимальной энтропии применительно к адаптивной обработке сигналов необходимо кратко рассмотреть, как задача линейного предсказания связана с задачей спектрального оценивания и как обе эти задачи решаются с помощью алгоритма Берга.

Предсказание выборки $Z_k$ на основе линейной фильтрации $p$ предыдущих выборок процесса с коэффициентами $a_p$ может быть представлено уравнением авторегрессии. В этом случае $Z_k$ означает ошибку предсказания. Если случайный входной процесс может рассматриваться как процесс авторегрессии порядка $p$ с коэффициентами $a_p$, то $\xi_k$ будет белым шумом. Таким образом, взяв $\xi_k$ как исходный процесс, получаем линейный фильтр предсказания с частотной характеристикой:

$$H(f) = 1 + \sum_{n=1}^{p} a_n e^{-j2\pi n f T}.$$

Такой фильтр, в котором управление весовыми коэффициентами осуществляется на основе коэффициентов авторегрессии, является фактически обеляющим для $Z_k$. Предположим, что наблюдается $N$ выборок случайного входного процесса. Значит, производя оценку коэффициентов авторегрессии и используя их в качестве весовых коэффициентов в нерекурсивном адаптивном фильтре $p$-порядка, получаем цифровую обработку, необходимую для реализации первого этапа вычисления алгоритма (3) или (4).

Процедура «обеления» может быть реализована ещё проще. Для этого может быть использовано формирование весовых коэффициентов на основе алгоритма Берга, который выражается следующими рекуррентными соотношениями:

$$a_{k,i} = a_{k-1,i} + a_{k,k} a^{*}_{k-1,i-1},$$

$$\sigma_k^2 = \left(1 - |a_{k,k}|^2\right)\sigma_{k-1}^2,$$

$$a_{i,i} = \frac{-2\sum_{k=i}^{N-1} b_{i-1,k-1} e_{i-1,k}}{\sum_{k=i}^{N-1}\left(\left|b_{i-1,k-1}\right|^2 + \left|e_{i-1,k}\right|^2\right)},$$

где $a_{i,i}$ – оценка коэффициентов отражения; $e_{i,k}$, $b_{i,k}$ – ошибки предсказания вперёд и назад. Начальные условия $e_{0,i} = b_{0,i} = Z_i$, $\sigma_1^2 = \left(1 - |a_{1,1}|^2\right)\sigma^2$, где $\sigma^2$ – оценка мощности помехи. Алгоритм Берга реализуется на основе решетчатого фильтра.

Таким образом, простейший «обелитель» – это решетчатый фильтр, который, формируя на выходе ошибки предсказания, обеспечивает предел точности ошибок предсказания для авторегрессионной модели, т.е. формирует белый шум. Второй этап обработки по алгоритмам (3) и (4) может быть упрощённо реализован с помощью когерентного многоканального накопителя на базе устройства ДПФ или некогерентного накопителя [3]. В общем случае на втором этапе обработки для алгоритма следует учитывать оценки параметров авторегрессии, полученные на первом этапе обработки. Действительно, обратную ковариационную матрицу можно представить в виде разложения на диагональную $D$ и верхнюю и нижнюю треугольные матрицы $A$ коэффициентов авторегрессии:

$$M^{-1} = ADA^*.$$

Тогда в соответствии с (3) получим квазиоптимальный алгоритм:

$$Z_1 = (Z_{вх}A)^* D(AS).$$

Алгоритм (3) может быть реализован без предварительного адаптивного «обеления» коррелированной помехи, т.е.

$$Z_1 = Z^*_{BX}\left(ADA^* S(n)\right) = Z^* W(n).$$

Таким образом, при неизвестной скорости цели адаптивный алгоритм реализуется с помощью многоканального допплеровского фильтра, каждый канал которого имеет свои весовые коэффициенты, учитывающие как коэффициенты разложения по Фурье, так и оценки коэффициентов авторегрессии. Как и для Марковской модели, упрощение алгоритма (4) приводит к аналогичному выражению для модифицированного алгоритма обнаружения:

$$Z_2 = \frac{1}{\sigma_p^2} \sum_{j=0}^{N-p-1} \left| \sum_{i=0}^{p} Z^*_{j+i} a_{pi} \right|^2.$$

Однако, в отличие от Марковской модели, данный алгоритм управления весовыми коэффициентами и последующим некогерентным накоплением позволяет эффективно бороться и с многокомпонентными коррелированными помехами [4].

## Заключение

Исходя из рассмотренных методов управления весовыми коэффициентами в обнаружителе движущихся целей, можно сделать вывод, что наиболее предпочтительным с точки зрения скорости обработки принимаемых сигналов и принятия решения о наличии полезного сигнала во входной выборке наблюдений является метод, основанный на авторегрессионной модели коррелированной помехи. При его использовании в режиме реального времени достаточно оценивать только коэффициенты авторегрессии.

Использование Марковской модели коррелированной помехи приводит к модульной структуре обработки с распараллеливанием вычислений при использовании адаптивных автокомпенсаторов с одним весовым коэффициентом. Однако данный метод применим лишь к помехам с одномодовыми спектрами. Метод авторегрессии, используя реккурентные алгоритмы в режиме реального времени, позволяет существенно приблизиться к оптимальному алгоритму. При его использовании остаётся лишь проблема выбора порядка авторегрессии.

## Литература


1. *Бартенев В.Г., Шлома А.М.* О построении адаптивного обнаружителя импульсных сигналов на фоне нормальных помех с неизвестными корреляционными свойствами. Радиотехника. 1978. Т. 33. № 2.
2. *Бартенев В.Г.* Эффективность алгоритмов объединения квадратурных каналов. Современная электроника. 2010. № 2.
3. *Бартенев В.Г., Логинов А.Н.* Авторегрессионный подход к задаче инвариантного обнаружения. Радиотехника. 1985. Т. 39. № 11.
4. *Бакулев П.А., Кован С.Е.* Алгоритм обнаружения сигналов на фоне многомодовых коррелированных помех. Радиотехника. 1981. Т. 36. № 8. С.69–72.